3.5.4 Počet řešení rovnice

Předpoklady: 030503

Př. 1: Dosaď postupně čísla $\{0;1;2;3\}$ do rovnice $(x-1)(x-3)(x+1)=0$. Která z nich jsou jejím řešením? Existuje ještě další číslo, které je řešením této rovnice?

Dosazujeme:

- $x=0$:
  $(0-1)(0-3)(0+1)=(-1)\cdot(-3)\cdot 1=3\neq 0$
  $3\neq 0$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ 0 není řešením rovnice,
- $x=1$:
  $(1-1)(1-3)(1+1)=0\cdot(-2)\cdot 2=0$
  $0=0$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 1 je řešením rovnice,
- $x=2$:
  $(2-1)(2-3)(2+1)=1\cdot(-1)\cdot 3=3\neq 0$
  $3\neq 0$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ 2 není řešením rovnice,
- $x=3$:
  $(3-1)(3-3)(3+1)=2\cdot 0\cdot 4=0$
  $0=0$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 3 je řešením rovnice,

Z nabízených čísel jsou řešením rovnice čísla 1 a 3.

Rovnice vyšla vždy, když jedna ze závorek, které se v rovnici násobí, byla nulová. Poslední závorkou je závorka $(x+1)$ $\Rightarrow$ dalším řešením bude zřejmě číslo -1. Zkusíme ho dosadit.

- $x=-1$:
  $(-1-1)(-1-3)(-1+1)=(-2)\cdot(-4)\cdot 0=0$
  $0=0$ - platná rovnost $\Rightarrow$ -1 je řešením rovnice,

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je velmi zajímavý z hlediska toho, jak žáci uvažují. Ti nejhorší si ani nevšimnou, že mají hledat další kořen. Ti lepší zkusí dosadit 5 (nalezené kořeny byla lichá čísla, 5 je další na řadě) a ti, kteří uvažují opravdu matematicky, už vědí, že dalším kořenem je -1 kvůli vynulování závorky, protože už během řešení sledovali, "co se v rovnici děje". Po kontrole řešení se bavíme i o této poznámce a ukazujeme, co je vnitřní podstatná podobnost (nulování závorek, které nulují levou stranu rovnice) a co je nepodstatná vnější podobnost (lichá čísla od 1 výše) bez logického základu.

Pedagogická poznámka: Smyslem předchozího příkladu rozhodně není postup na řešení rovnic v součinovém tvaru.

Př. 2: Z množiny čísel $\{-1; 0; 1; 2\}$ vyber ta, která jsou řešením rovnice:

a) $3(x-1)+1=2(x-1)+x$ b) $x(x-1)=2$ c) $x^2+2=3x$

Ve všech případech zkusíme dosazovat nabízené hodnoty, pokud získáme platné rovnosti, dosazená čísla jsou řešením rovnice.

a) $3(x-1)+1=2(x-1)+x$

- $x=-1$:
  $3(-1-1)+1=2(-1-1)+(-1)$
  $3(-2)+1=2(-2)+(-1)$
  $-5=-5$ - platná rovnost $\Rightarrow$ -1 je řešením rovnice,
- $x=0$:
  $3(0-1)+1=2(0-1)+0$
  $3(-1)+1=2(-1)+0$
  $-2=-2$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 0 je řešením rovnice,
- $x=1$:
  $3(1-1)+1=2(1-1)+1$
  $3\cdot 0+1=2\cdot 0+1$
  $1=1$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 1 je řešením rovnice,
- $x=2$:
  $3(2-1)+1=2(2-1)+2$
  $3\cdot 1+1=2\cdot 1+2$
  $4=4$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 2 je řešením rovnice.

b) $x(x-1)=2$

- $x=-1$:
  $(-1)(-1-1)=(-1)(-2)=2$
  $2=2$ - platná rovnost $\Rightarrow$ -1 je řešením rovnice,
- $x=0$:
  $0\cdot(0-1)=0$
  $0\neq 2$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ 0 není řešením rovnice,
- $x=1$:
  $1\cdot(1-1)=0$
  $0\neq 2$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ 1 není řešením rovnice,
- $x=2$:
  $2\cdot(2-1)=2\cdot 1=2$
  $2=2$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 2 je řešením rovnice.

c) $x^2+2=3x$

- $x=-1$:
  $(-1)^2+2=3(-1)$
  $3\neq -3$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ -1 není řešením rovnice,

- $x = 0$:
  $0^2 + 2 = 3 \cdot 0$
  $2 \neq 0$ - neplatná rovnost $\Rightarrow$ 0 není řešením rovnice,
- $x = 1$:
  $1^2 + 2 = 3 \cdot 1$
  $3 = 3$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 1 je řešením rovnice,
- $x = 2$:
  $2^2 + 2 = 3 \cdot 2$
  $2 = 2$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 2 je řešením rovnice.

Nejzajímavější z rovnic je rovnice $3(x-1)+1 = 2(x-1)+x$. Všechna zkoušená čísla byla jejími kořeny.

Př. 3: Dosaď za x do rovnice $3(x-1)+1 = 2(x-1)+x$ libovolné číslo a vyzkoušej, zda je jejím řešením.

Zkusíme například $x = 10$: $3(10-1)+1 = 2(10-1)+10$
$3 \cdot 9 + 1 = 2 \cdot 9 + 10$
$27 + 1 = 18 + 10$
$28 = 28$ - platná rovnost $\Rightarrow$ 10 je řešením rovnice.

Něco exotičtějšího: $x = \sqrt{\pi}$: $3\left(\sqrt{\pi}-1\right)+1 = 2\left(\sqrt{\pi}-1\right)+\sqrt{\pi}$
$3\sqrt{\pi} - 3 + 1 = 2\sqrt{\pi} - 2 + \sqrt{\pi}$
$3\sqrt{\pi} - 2 = 3\sqrt{\pi} - 2$ - platná rovnost $\Rightarrow$ $\sqrt{\pi}$ je řešením rovnice.

Zřejmě řešením rovnice $3(x-1)+1 = 2(x-1)+x$ je každé číslo.

Pedagogická poznámka: Motivuji žáky, aby dosadili, co "nejdivnější číslo" a dovoluji i kalkulačky, takže máme dosazováním ověřeny i hodně obskurní výsledky jako $x = 123584777$.

Př. 4: Najdi důvod, proč řešením rovnice $3(x-1)+1 = 2(x-1)+x$ je každé reálné číslo.

Stačí roznásobit závorky a vidíme, že na obou stranách rovnice je to samé, jenom jinak napsané.
$3(x-1)+1 = 2(x-1)+x$
$3x - 3 + 1 = 2x - 2 + x$
$3x - 2 = 3x - 2$

Že má rovnice nekonečně mnoho řešení, je jasné v okamžiku, kdy zjistíme, že na obou stranách je to samé. Přesto se ještě někdy upravuje dále:
$3x - 2 = 3x - 2 \quad / +2$
$3x = 3x \quad / -3x$
$0 \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ Rovnice má nekonečně mnoho řešení, protože ať dosadíme za x cokoliv, po vynásobení nulou bude pravá strana rovna nule a bude se tak rovnat levé straně.

Př. 5: Najdi všechny kořeny uvedených rovnic.

a) $2x-3=x+1$ b) $5(x+1)-3=2(x+1)+3x$ c) $2x+5=3(x+1)+2$

d) $7(x+2)-2=5x+2(x+3)$ e) $x^2=3x$

a) $2x-3=x+1 \quad /+3$

$2x=x+4 \quad /-x$

$x=4$

b) $5(x+1)-3=2(x+1)+3x$

$5x+5-3=2x+2+3x$

$5x+2=5x+2 \quad /-2$

$5x=5x \quad /-5x$

$0=0$ Řešením jsou všechna reálná čísla.

c) $2x+5=3(x+1)+2$

$2x+5=3x+3+2$

$2x+5=3x+5 \quad /-5$

$2x=3x \quad /-2x$

$0=x$

d) $7(x+2)-2=5x+2(x+3)$

$7x+14-2=5x+2x+6$

$7x+12=7x+6 \quad /-12$

$7x=7x-6 \quad /-7x$

$0=-6$

Řešením není žádné číslo.

e) $x^2=3x \quad /:x$ (nesmí být nula)

$x=3$

Ještě vyzkoušíme $x=0$.

$0^2=3\cdot 0$

$0=0$ Platná rovnost $\Rightarrow$ i 0 je řešením.

Skutečnost, že rovnice $7(x+2)-2=5x+2(x+3)$ nemá řešení, byla zřejmá už ve chvíli, kdy jsme dospěli do tvaru $7x+12=7x+6$: počet x je na obou stranách stejný $\Rightarrow$ dosazením získáme na obou stranách stejné číslo, ale protože se k tomuto číslu na obou stranách přičítá něco jiného, rovnost nikdy nenastane $\Rightarrow$ rovnice nemá žádné řešení.

Př. 6: Jak vypadá po úpravách rovnice, která má:

a) nekonečně mnoho řešení b) žádné řešení.

a) nekonečně mnoho řešení

Rovnice má nekonečně mnoho řešení, pokud ji můžeme upravit na tvar $0x=0$.

b) žádné řešení

Rovnice nemá žádné řešení, pokud ji můžeme upravit na tvar $0=\textit{číslo různé od nuly}$.

Př. 7: Čím se vyznačovaly rovnice, se kterými jsme se setkali v této hodině a které měly právě dvě řešení?

Všechny rovnice, které měly právě dvě řešení, obsahovaly druhou mocninu.

Pedagogická poznámka: Při kontrole si připomínáme, že tento postřeh by během hodiny měli učinit všichni automaticky.

Shrnutí: Rovnice může mít nekonečně mnoho nebo i žádné řešení.